

I balconi appoggiati su mensole

Con un sistema costruttivo oggi in disuso, per l'impiego di nuovi metodi che garantiscono una maggiore sicurezza, nelle costruzioni realizzate sino a circa un secolo fa i balconi venivano ottenuti con una lastra di pietra di adeguato spessore, appoggiata su due o più mensole (dette *modiglioni*), sempre in pietra, incastrate nelle murature perimetrali portanti [fig. a], non essendo possibile prolungare all'esterno la struttura degli orizzontamenti, come attualmente viene fatto con i solai in c.a., essendo questi prevalentemente costituiti da volte e solo in alcuni casi da solai piani.

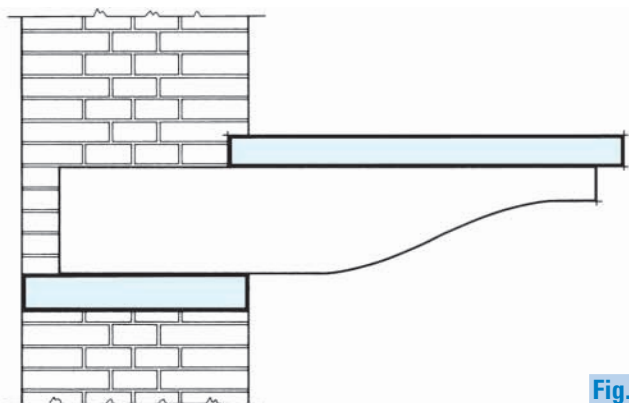


Fig. a

È opportuno comunque affrontare l'argomento in quanto, in caso di interventi su edifici nei centri storici, dovendo mantenere le caratteristiche architettoniche e strutturali esistenti, succede sovente di dover compiere verifiche statiche sull'esistente; in altri casi può invece accadere di dover realizzare nuovi balconi in edifici murari preesistenti (costruzioni in campagna o in montagna) al fine di adeguarli alle nuove esigenze.

In quest'ultimo caso il balcone viene ottenuto incastrando nella parete in muratura profilati in acciaio a doppio T, con interasse di 1,40 ÷ 1,60 m, sui quali può essere realizzata una soletta massiccia in cemento armato [fig. b]. Al fine di un'ade-

guata ripartizione dei carichi sui muri, nel vano aperto nella muratura viene eseguito un cordolo, anche discontinuo, in c.a., mentre, ai fini della sicurezza al ribaltamento, le parti terminali delle mensole vengono collegate con un profilato HE ad ali larghe, sigillato alla muratura esistente con malta antiritiro, e quindi viene effettuata la chiusura del vano con muratura o calcestruzzo.

Con riferimento al balcone in pietra di figura c, per la sua verifica di stabilità si procede determinando dapprima lo schema statico e di carico, che generalmente è il seguente:

a) la lastra in pietra presenta lo schema statico di una trave su due appoggi, costituiti dalle mensole, e due sbalzi (oppure senza se le mensole sono disposte alle estremità), gravata di un carico ripartito, costituito dal peso proprio e dal carico di

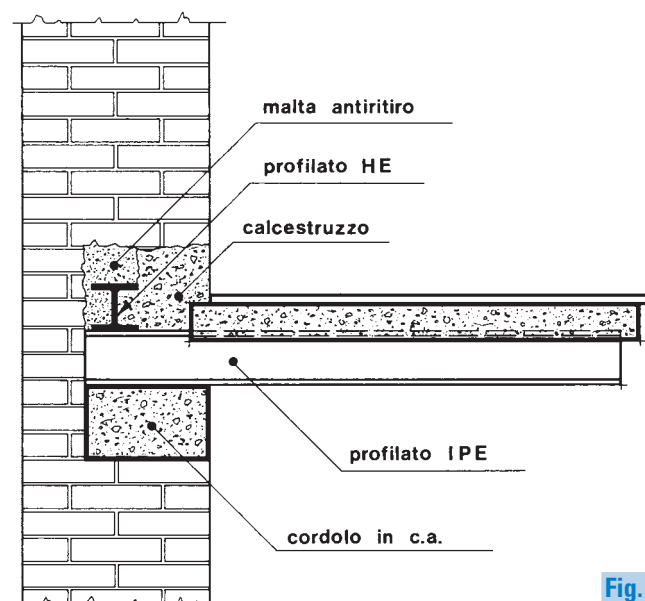


Fig. b

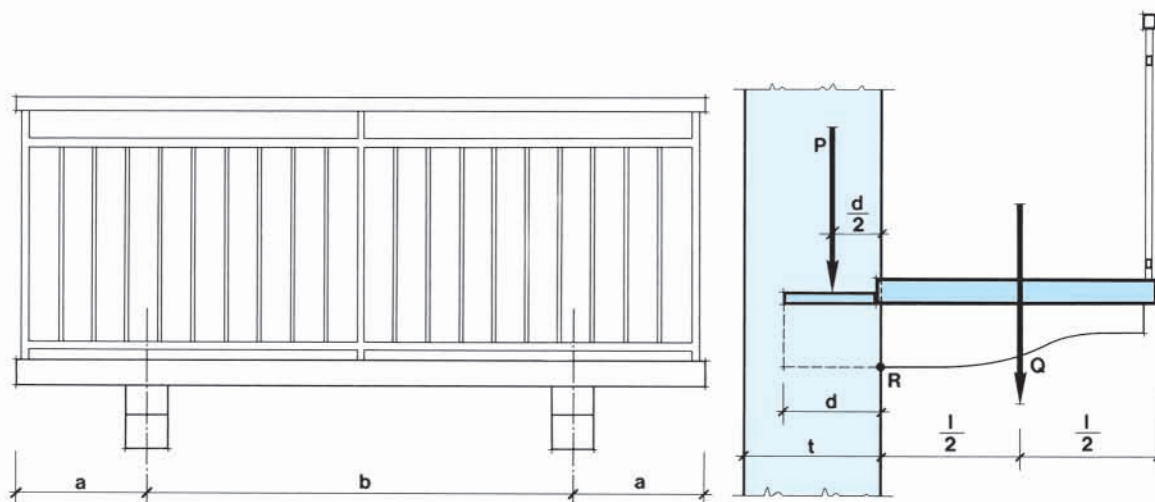


Fig. c

esercizio, e da due carichi concentrati alle estremità dovuti al peso della ringhiera nel senso trasversale;

b) ogni mensola è una trave a sbalzo soggetta al carico ripartito trasmesso dalla lastra, al peso proprio e a un carico concentrato alle estremità determinato dalla metà del peso della ringhiera nel senso longitudinale.

Si devono effettuare le seguenti verifiche:

1. verifica di stabilità al ribaltamento: consiste nel controllo che l'incastro sia in grado di contrastare efficacemente la rotazione della mensola attorno allo spigolo esterno R [fig. c], determinata dal momento M_i della mensola all'incastro:

$$M_i = Q \cdot \frac{l}{2}$$

al quale deve opporsi il momento di stabilità:

$$M_s = P \cdot \frac{d}{2}$$

essendo P il carico trasmesso dal muro, compreso il peso proprio, gravante sulla mensola; qualora la larghezza della mensola fosse insufficiente a questo scopo, su questa viene disposta una lastra in pietra al fine di aumentare la superficie di appoggio della muratura, e quindi il relativo peso gravante sulla mensola [fig. d]. La verifica di stabilità può ritenersi positiva quando risulta:

$$\frac{M_s}{M_i} \geq 1,5$$

2. verifica delle tensioni determinate dalla mensola sulla muratura: ammettendo una ripartizione triangolare delle tensioni indotte dalla mensola sulle murature, i loro valori massimi si verificano in corrispondenza delle estremità della parte incastrata nella muratura, sulle sezioni superiore e inferiore della muratura stessa rispetto alla mensola.

Non essendo possibile individuare uno schema statico preciso della mensola a causa della diversità fra i due materiali a contatto (in genere muratura e pietra), viene considerata l'ipotesi

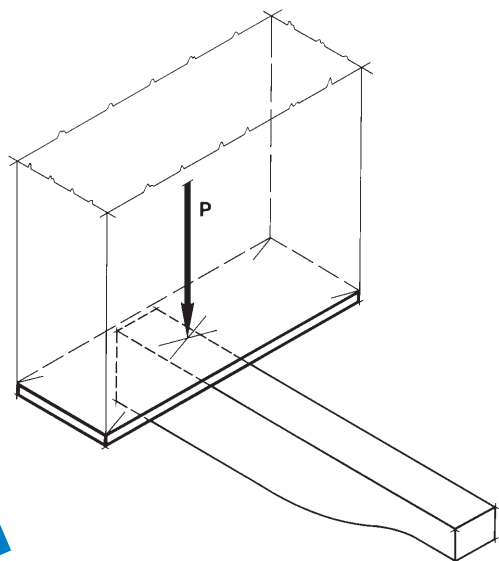


Fig. d

3.1.5 Strutture in muratura non tridimensionale

che risulta più gravosa, fornendo valori di tensioni che possono essere considerati massimi.

Per effettuare questa verifica si immagina di sostituire l'incastro con due appoggi contrapposti molto vicini, per cui la mensola viene così sostituita da una trave su due appoggi, in U e V [fig. e], e una mensola, della quale vengono calcolati le reazioni vincolari R_s ed R_i , i momenti flettenti M_U ed M_V e gli sforzi di taglio V_U e V_V .

In favore della sicurezza, in quanto si vengono così a determinare tensioni più gravose, i due appoggi fittizi contrapposti si pensano disposti a una distanza pari a $b/6$ dalle estremità della parte incastrata [fig. e] essendo b la lunghezza del tratto di mensola incastrato nel muro. Con questa ipotesi si considerano reagenti le sole sezioni triangolari di traccia AE , inferiore, e CF , superiore, per le quali gli assi neutri coincidono con i lati di traccia E ed F ; di conseguenza ogni sezione presenta un diagramma tensionale triangolare e quindi risulta totalmente compressa. In base alla teoria della presso-flessione,

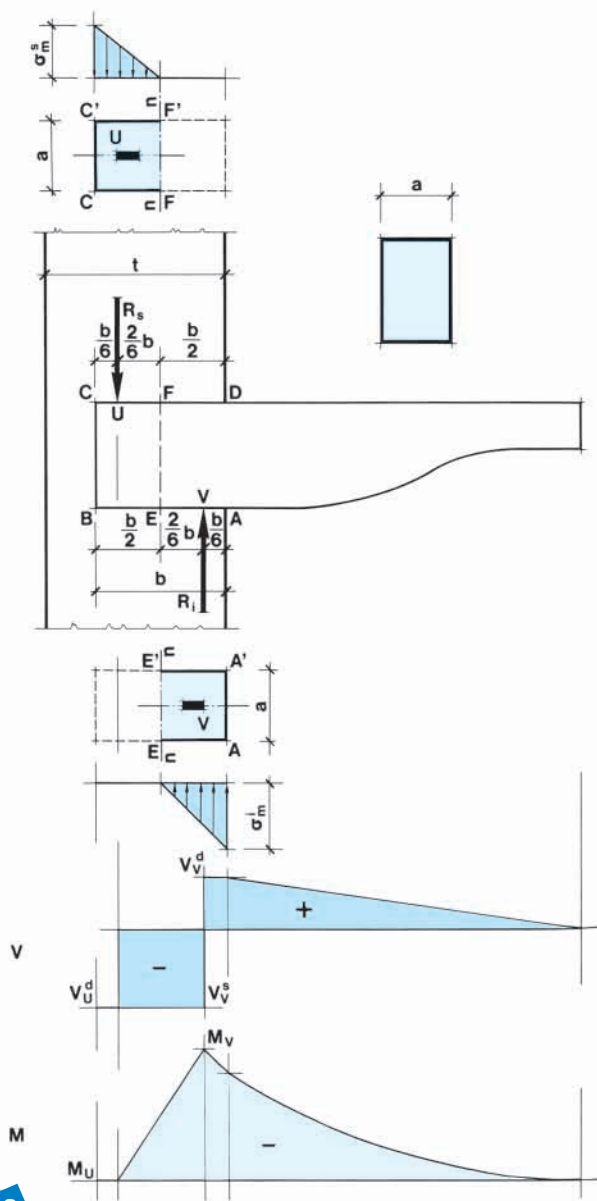


Fig. e

essendo ogni reazione R_s ed R_i applicata all'estremo del terzo medio delle due sezioni di traccia AE e CF , le tensioni massime alle estremità risultano [fig. f]:

$$\sigma_m^s = -\frac{2 \cdot R_s}{A} = -\frac{2 \cdot R_s}{\frac{b}{2} \cdot a}$$

ossia:

$$\sigma_m^s = -\frac{4 \cdot R_s}{b \cdot a}$$

e analogamente:

$$\sigma_m^i = -\frac{4 \cdot R_i}{b \cdot a}$$

essendo a la base della mensola.

3.1.5 Strutture in muratura non tridimensionale

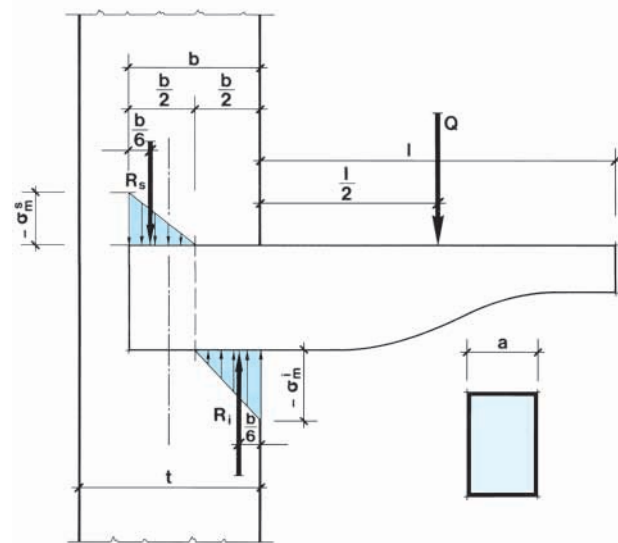
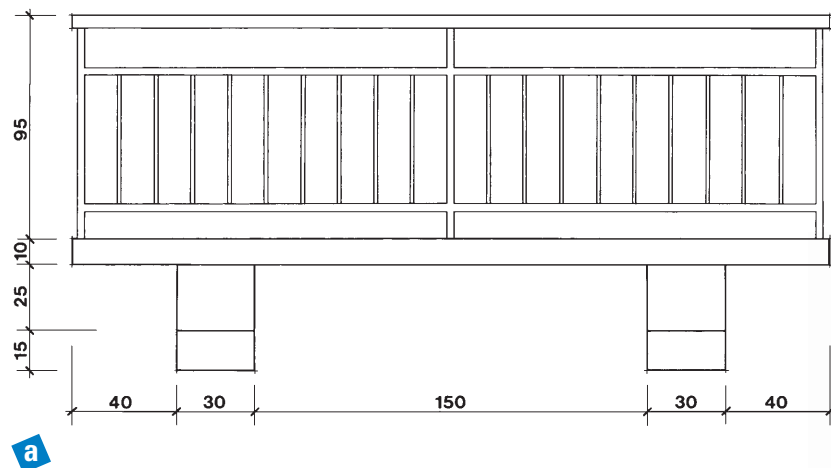


Fig. f

ESERCIZIO SVOLTO

Verificare la stabilità del balcone con mensole in pietra e soprastante lastrone, con le dimensioni riportate nelle figure a e b, estendendo la verifica al muro in cui sono incastrate le mensole, che è in mattoni pieni (resistenza caratteristica $f_{bk} = 20 \text{ N/mm}^2$) e malta M10.

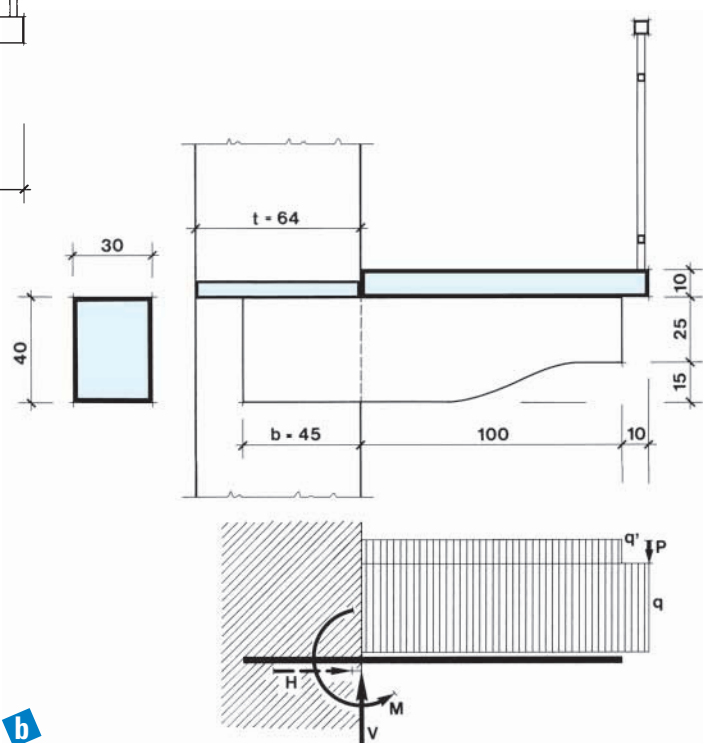


Verifica del lastrone di pietra

Lo schema statico è quello di una trave su due appoggi e due sbalzi simmetrici; si assumono per la pietra le seguenti caratteristiche meccaniche:

- tensione ammissibile a flessione: $\bar{\sigma}_f = 140 \text{ N/cm}^2$
- tensione ammissibile a taglio: $\bar{\tau} = 50 \text{ N/cm}^2$
- modulo elastico: $E = 50\,000 \times 10^2 \text{ N/cm}^2$
- peso volumico: $\gamma = 28 \text{ kN/m}^3$

L'analisi dei carichi viene effettuata per la lunghezza di 1,00 m e per la larghezza di 1,10 m.



3.1.5 Strutture in muratura non tridimensionale

Carico di esercizio:

$$p = 4,00 \text{ kN/m}^2 \times 1,10 \text{ m} = 4,40 \text{ kN/m}$$

Peso proprio del lastrone:

$$g = (1,00 \times 1,10 \times 0,10) \text{ m}^3/\text{m} \cdot 28 \text{ kN/m}^3 = 3,08 \text{ kN/m}$$

$$q = 7,48 \text{ kN/m}$$

Alle estremità agiscono inoltre due carichi concentrati P che rappresentano il peso della ringhiera trasversale, con valore $P = 0,36 \text{ kN/m} \cdot 1,10 \text{ m} \approx 0,40 \text{ kN}$ ($0,36 \text{ kN/m}$ è il peso medio di una ringhiera in ferro a bacchetta diritta).

1. Ipotesi di carico

Al fine di ricercare le massime sollecitazioni, vengono effettuate tre ipotesi di carico.

Prima ipotesi [fig. c]

Reazioni vincolari

$$R_A = R_B = \frac{1}{2} \times (2 \times 4,40 \times 0,55 + 3,08 \times 2,90 + 2 \times 0,40) \approx 7,29 \text{ kN}$$

Sollecitazione di sforzo di taglio

$$V_C^d = -V_D^s = -0,40 \text{ kN}$$

$$V_A^s = -V_B^d = -0,40 - 7,48 \times 0,55 \approx -4,51 \text{ kN}$$

$$V_A^d = -V_B^s = -4,51 + 7,29 = 2,78 \text{ kN}$$

Lo sforzo di taglio si annulla, per la simmetria, anche nella sezione con ascissa

$$x = \frac{l}{2} = 0,90 \text{ m}$$

Sollecitazione di momento flettente

$$M_A = M_B = -0,40 \times 0,55 - 7,48 \times \frac{0,55^2}{2} \approx -1,35 \text{ kN m}$$

$$M_{\frac{l}{2}} = M_A + V_A^d \cdot 0,90 - g \cdot \frac{0,90^2}{2} = -1,35 + 2,78 \times 0,90 - 3,08 \times \frac{0,90^2}{2} = -0,10 \text{ kN m}$$

Seconda ipotesi [fig. d]

Reazioni vincolari

$$R_A = R_B = \frac{1}{2} \times (4,40 \times 1,80 + 3,08 \times 2,90 + 2 \times 0,40) \approx 8,83 \text{ kN}$$

Sollecitazione di sforzo di taglio

$$V_C^d = -V_D^s = -0,40 \text{ kN}$$

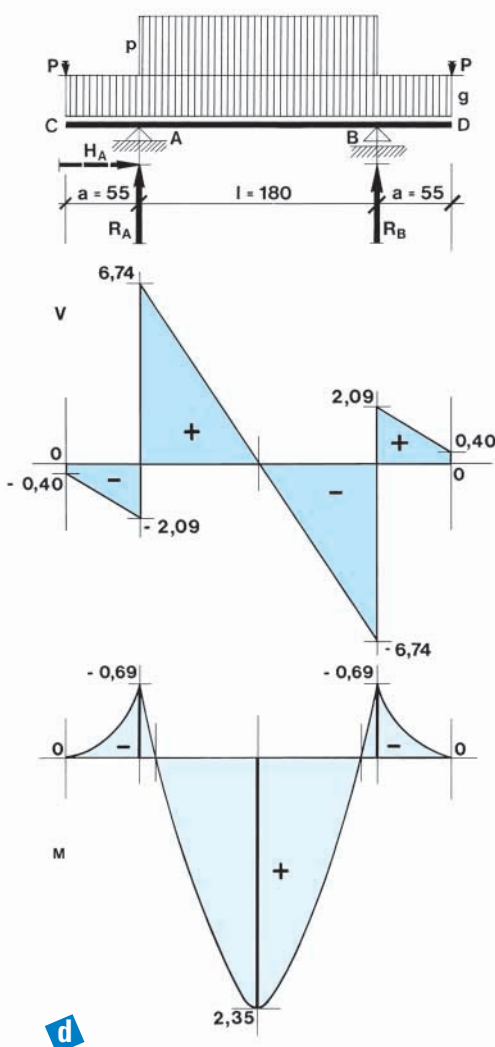
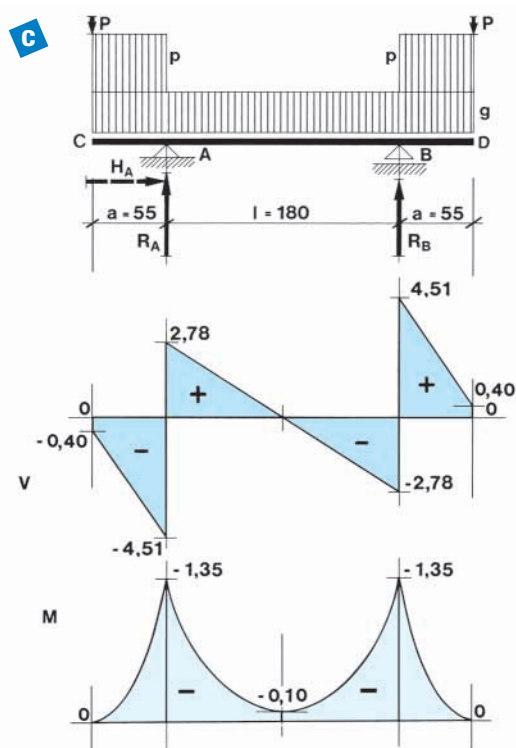
$$V_A^s = -V_B^d = -0,40 - 3,08 \times 0,55 \approx -2,09 \text{ kN}$$

$$V_A^d = -V_B^s = -2,09 + 8,83 = 6,74 \text{ kN}$$

Per la simmetria lo sforzo di taglio si annulla anche nella sezione di mezzzeria.

Sollecitazione di momento flettente

$$M_A = M_B = -0,40 \times 0,55 - 3,08 \times \frac{0,55^2}{2} \approx -0,69 \text{ kN m}$$



3.1.5 Strutture in muratura non tridimensionale

$$M_{\frac{l}{2}} = M_A + V_A^d \cdot 0,90 - q \cdot \frac{0,90^2}{2} =$$

$$= -0,69 + 6,74 \times 0,90 - 7,48 \times \frac{0,90^2}{2} \approx 2,35 \text{ kN m}$$

Terza ipotesi [fig. e]

Reazioni vincolari

$$R_A = R_B = 0,40 + \frac{7,48 \times 2,90}{2} \approx 11,25 \text{ kN}$$

Solicitazione di sforzo di taglio

$$V_C^d = -V_D^s = -0,40 \text{ kN}$$

$$V_A^s = -V_B^d = -0,40 - 7,48 \times 0,55 \approx -4,51 \text{ kN}$$

$$V_A^d = -V_B^s = -4,51 + 11,25 = 6,74 \text{ kN}$$

Solicitazione di momento flettente

$$M_A = M_B = -0,40 \times 0,55 - 7,48 \times \frac{0,55^2}{2} \approx -1,35 \text{ kN m}$$

$$M_{\frac{l}{2}} = M_A + V_A^d \cdot 0,90 - q \cdot \frac{0,90^2}{2} =$$

$$= -1,35 + 6,74 \times 0,90 - 7,48 \times \frac{0,90^2}{2} \approx 1,69 \text{ kN m}$$

Lo sforzo massimo di taglio si ottiene nella seconda e nella terza ipotesi, con un valore $V = 6,74 \text{ kN}$, mentre il massimo momento flettente in valore assoluto si ottiene nella seconda ipotesi dove $M = 2,35 \text{ kN m}$; con questi valori vengono ora effettuate le verifiche.

2. Verifica a flessione

Il modulo di resistenza risulta:

$$W = \frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2 = \frac{1}{6} \times 110 \times 10^2 \approx 1833,33 \text{ cm}^3$$

e la tensione nella lastra di pietra vale:

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{235000}{1833,33} \approx 128,18 \text{ N/cm}^2 < \bar{\sigma}_f$$

3. Verifica a taglio

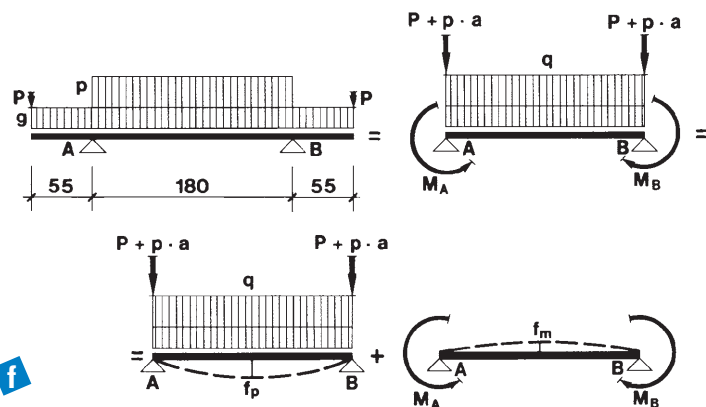
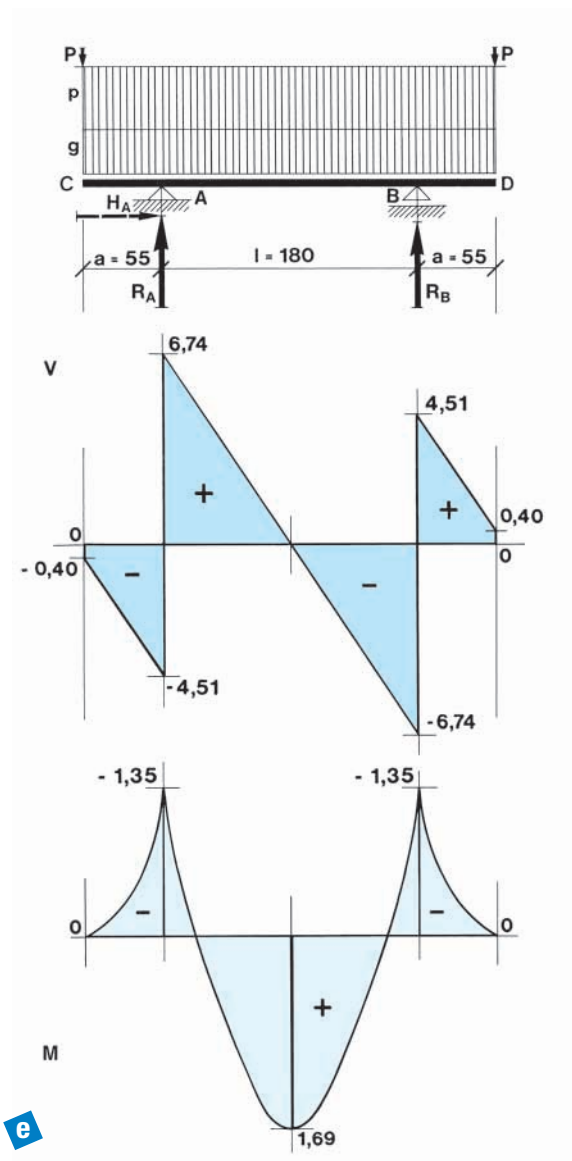
$$\tau = \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{A} = \frac{3}{2} \times \frac{6740}{110 \times 10} \approx 9,19 \text{ N/cm}^2 < \bar{\tau}$$

4. Verifica della deformazione

La massima deformazione si verifica con la seconda ipotesi di carico; la freccia teorica può essere calcolata applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, immaginando di sopprimere gli sbalzi e applicando in A e B alla trave così ottenuta i relativi momenti di incastro.

Freccia teorica [fig. f]:

$$I = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 = \frac{1}{12} \times 110 \times 10^3 \approx 9166,67 \text{ cm}^4$$



3.1.5 Strutture in muratura non tridimensionale

$$f = f_p + f_m = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I} + \frac{M_A \cdot l^2}{8 \cdot E \cdot I} =$$

$$= \frac{5}{348} \times \frac{74,80 \times 180^4}{50\,000 \times 10^2 \times 9166,67} - \frac{0,69 \times 10^5 \times 180^2}{8 \times 50\,000 \times 10^2 \times 9166,67} = 0,0223 - 0,0061 = 0,0162 \text{ cm}$$

Freccia ammissibile:

$$f_{am} = \frac{1}{500} \cdot l = \frac{1}{500} \times 180 = 0,36 \text{ cm} > f$$

Le risorse elastiche della pietra sono molto limitate e per questo motivo la freccia teorica è molto ridotta e tale deve sempre essere, anche considerando che la pietra presenta una rottura fragile, passando cioè alla rottura senza apprezzabili deformazioni plastiche.

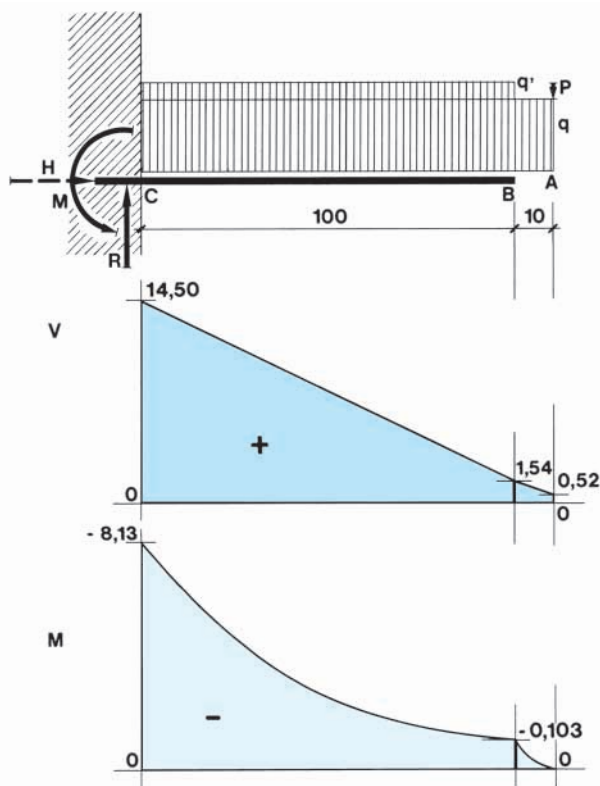
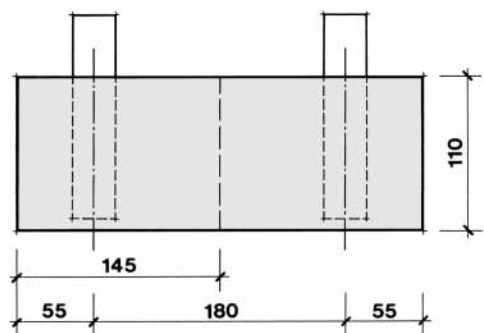
Verifica di una mensola in pietra

1. Analisi dei carichi

- Carico ripartito uniforme trasmesso dalla lastra di pietra, corrispondente alla reazione vincolare con intensità di 11,25 kN agente sulla lunghezza $l = 1,10 \text{ m}$ [fig. g]:

$$q = \frac{11,25}{1,10} \approx 10,23 \text{ kN/m}$$

g



h

- Carico ripartito uniforme dovuto al peso proprio [fig. h] (la sezione viene assimilata a un trapezio):

$$q' = \left(\frac{0,25 + 0,40}{2} \times 0,30 \times 1,00 \right) \text{ m}^3/\text{m} \times$$

$$\times 28,00 \text{ kN/m}^3 = 2,73 \text{ kN/m}$$

- Carico concentrato applicato all'estremità della lastra rappresentato dal peso della ringhiera:

$$P = 0,36 \text{ kN/m} \cdot 1,45 \text{ m} \approx 0,52 \text{ kN}$$

Lo schema strutturale e di carico è riportato in figura h.

2. Calcolo delle sollecitazioni

Reazione vincolare

$$R = 10,23 \times 1,10 + 2,73 \times 1,00 + 0,52 \approx 14,50 \text{ kN}$$

Sollecitazione di sforzo di taglio

$$V_C^d = 14,50 \text{ kN}$$

$$V_B = 14,50 - (10,23 + 2,73) \times 1,00 = 1,54 \text{ kN}$$

$$V_A^s = 1,54 - 10,23 \times 0,10 \approx 0,52 \text{ kN}$$

Sollecitazione di momento flettente

$$M_B = -0,52 \times 0,10 - 10,23 \times \frac{0,10^2}{2} = -0,103 \text{ kNm}$$

$$M_C = -0,52 \times 1,10 - 10,23 \times \frac{1,10^2}{2} - 2,73 \times \frac{1,00^2}{2} =$$

$$= -8,13 \text{ kNm}$$

La verifica viene effettuata nella sezione di incastro che è la più sollecitata.

3. Verifica a flessione

$$W = \frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2 = \frac{1}{6} \times 30 \times 40^2 = 8000 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_{fl} = \frac{M}{W} = \frac{8,13 \times 10^5}{8000} = 101,63 \text{ N/cm}^2 < \bar{\sigma}_{fl} = 140 \text{ N/cm}^2$$

4. Verifica a taglio

$$\tau = \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{A} = \frac{3}{2} \times \frac{14\,500}{30 \times 40} \approx 18,13 \text{ N/cm}^2 < \bar{\tau} = 50 \text{ N/cm}^2$$

Verifica del muro

Per l'azione del momento di incastro ($M = -8,13 \text{ kN m}$), la mensola in pietra tende a ruotare in modo rigido attorno al punto C, e a tale rotazione deve opporsi il momento calcolato rispetto allo stesso punto, prodotto dalla massa muraria gravante sulla mensola [fig. i]. Supponendo un'altezza di piano di 5,00 m e trascurando il carico trasmesso dai solai per la loro limitata incidenza, data la superficie in pianta molto ridotta della mensola, la sezione del prisma di muro occorrente per la stabilità e che grava sulla lastra di pietra disposta sopra la mensola, risulta:

$$A = 0,64 \cdot x$$

con un peso:

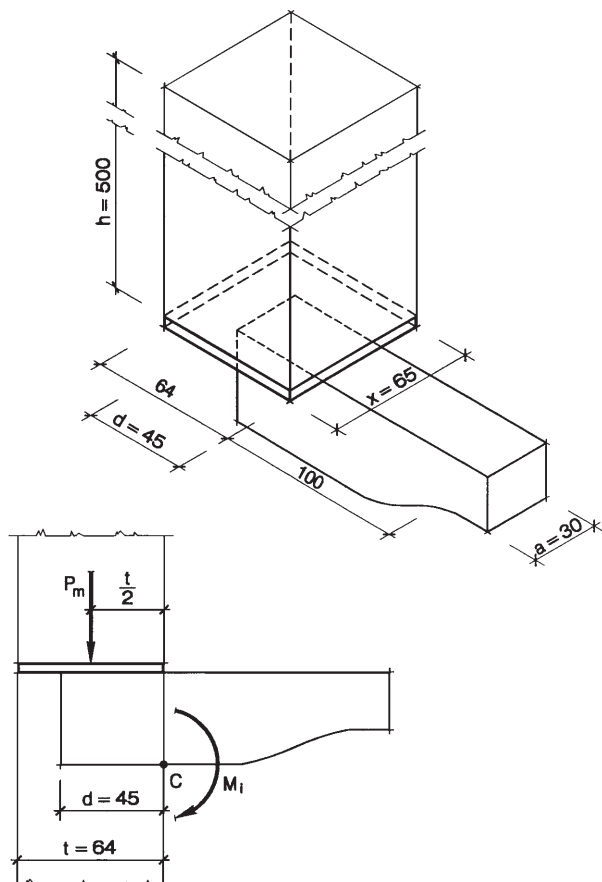
$$P_m = A \cdot h \cdot \gamma_m = (0,64 \cdot x \cdot 5,00) \text{ m}^3 \cdot 19,00 \text{ kN/m}^3 = (60,80 \cdot x) \text{ kN}$$

avendo assunto, per le caratteristiche della muratura, un peso volumico con valore $\gamma_m = 19,00 \text{ kN/m}^3$; il relativo momento M_s vale:

$$M_s = P_m \cdot \frac{t}{2} = 60,80 \cdot x \cdot 0,32 \approx (19,46 \cdot x) \text{ kN m}$$

Per la stabilità al ribaltamento è necessario che si abbia almeno un coefficiente di sicurezza 1,5, ossia:

$$\frac{M_s}{M_i} \geq 1,5$$



3.1.5 Strutture in muratura non tridimensionale

essendo M_i il momento di incastro (cioè il momento ribaltante) ed M_s il momento di stabilità; si ottiene quindi:

$$\frac{19460 \cdot x}{8130} = 1,5$$

e quindi:

$$x = \frac{8130 \times 1,5}{19460} \approx 0,63 \text{ m} \approx 0,65 \text{ m}$$

È necessario ora determinare le tensioni che si producono sulle facce superiore e inferiore della parte incastrata della mensola.

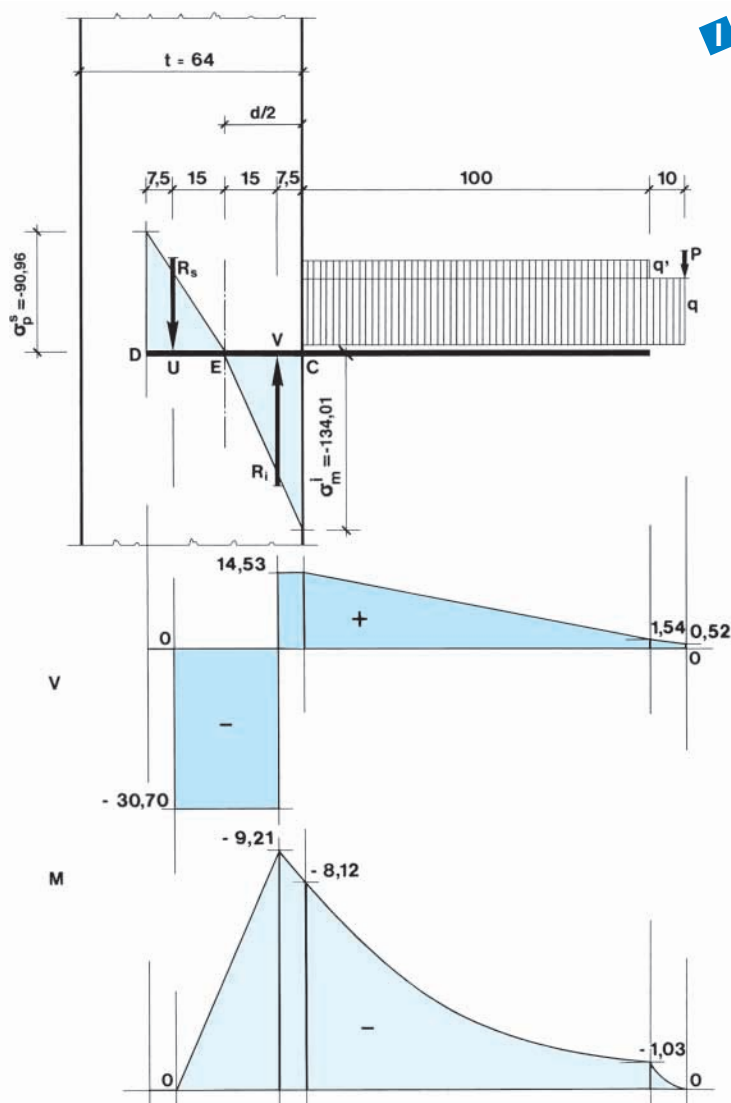
Si ipotizza quindi di sostituire l'incastro con due appoggi fittizi contrapposti a distanza $d/6 = 45/6 = 7,5 \text{ cm}$ dalle estremità della parte incastrata, per cui la mensola viene sostituita in tale modo con una trave sui due appoggi in U e V e una mensola; le reazioni di appoggio valgono [fig. l]:

$$\Sigma P_y = 0$$

$$-R_s + R_i - q' \cdot 1,00 - q \cdot 1,10 - P = 0$$

$$-R_s + R_i - 2,73 \times 1,00 - 10,23 \times 1,10 - 0,52 = 0$$

$$-R_s + R_i \approx 14,50 \text{ kN}$$



3.1.5 Strutture in muratura non tridimensionale

$$\Sigma M_v = 0$$

$$+ R_s \cdot 0,30 + q' \cdot 1,00 \times \left(\frac{1,00}{2} + 0,075 \right) + q \cdot 1,10 \times \left(\frac{1,10}{2} + 0,075 \right) + P \cdot (1,10 + 0,075) = 0$$

$$R_s = - \frac{2,73 \times 1,00 \times 0,575 + 10,23 \times 1,10 \times 0,625 + 0,52 \times 1,175}{0,30} \approx -30,70 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_u = 0$$

$$- R_i \cdot 0,30 + q' \cdot 1,00 \times \left(\frac{1,00}{2} + 0,375 \right) + q \cdot 1,10 \times \left(\frac{1,10}{2} + 0,375 \right) + P \cdot (1,10 + 0,375) = 0$$

$$R_i = \frac{2,73 \times 1,00 \times 0,875 + 10,23 \times 1,10 \times 0,925 + 0,52 \times 1,475}{0,30} \approx 45,23 \text{ kN}$$

Verifica

$$R_s + R_i = -30,70 + 45,23 = 14,53 \text{ kN} \approx 14,50 \text{ kN}$$

Vengono ora calcolati i momenti flettenti:

$$M_u = 0$$

$$M_v = R_s \cdot 0,30 = -30,70 \times 0,30 = -9,21 \text{ kN m}$$

$$M_c = R_s \cdot 0,375 + R_i \cdot 0,075 = -30,70 \times 0,375 + 45,23 \times 0,075 \approx -8,12 \text{ kN m}$$

valore quest'ultimo praticamente uguale al momento di incastro della mensola prima calcolato.

Gli sforzi di taglio valgono:

$$V_u^d = R_s = -30,70 \text{ kN}$$

$$V_v^s = V_u^d = -30,70 \text{ kN}$$

$$V_v^d = V_v^s + R_i = -30,70 + 45,23 = 14,53 \text{ kN}$$

$$V_c = V_v^d = 14,53 \text{ kN}$$

Quest'ultimo valore corrisponde praticamente allo sforzo di taglio prima calcolato.

Le reazioni R_u ed R_v , cambiate di verso, rappresentano le risultanti delle tensioni di compressione, con variazione trian-

golare, che si verificano sulle superfici superiore e inferiore della parte incastrata della mensola, rispettivamente di traccia DE ed EC ; poiché tali risultanti coincidono con l'estremo del terzo medio delle relative sezioni, queste ultime risultano totalmente compresse e le relative tensioni hanno il valore qui di seguito calcolato.

Superficie superiore

Viene calcolata la tensione massima trasmessa dalla mensola alla lastra di pietra sovrastante:

$$\sigma_p^s = - \frac{2 \cdot R_s}{d \cdot a} = - \frac{4 \cdot R_s}{d \cdot a} = - \frac{4 \times 30700}{45 \times 30} \approx -90,96 \text{ N/cm}^2 \approx -0,91 \text{ N/mm}^2$$

valore inferiore alla tensione ammissibile per compressione della pietra pari a circa 2 N/mm^2 .

Superficie inferiore

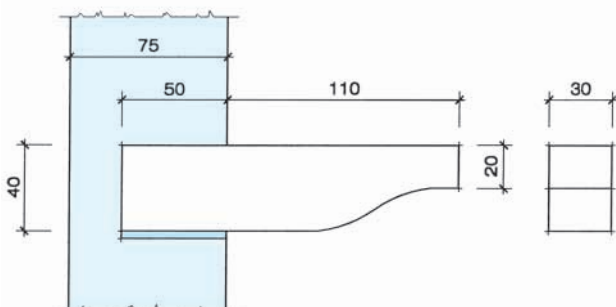
$$\sigma_m^i = - \frac{4 \cdot R_i}{d \cdot a} = - \frac{4 \times 45230}{45 \times 30} \approx -134,01 \text{ N/cm}^2 \approx -1,34 \text{ N/mm}^2 < \bar{\sigma}_m = \frac{f_k}{5} = \frac{8,0}{5} = 1,6 \text{ N/mm}^2$$

ESERCIZIO

I balconi appoggiati su mensole

Determinare le tensioni prodotte sulla muratura dal modiglione in pietra di un balcone con le caratteristiche geometriche riportate in figura che deve sopportare il carico $q = 15 \text{ kN/m}$ compreso il peso proprio.

Verificare inoltre l'eventuale necessità di disporre sotto il modiglione, in corrispondenza dell'incastro, un elemento di ripartizione della tensione. Assumere $\bar{\sigma}_m = -1,00 \text{ N/mm}^2$.



[tensione superiore $\sigma_m^s \approx 0,83 \text{ N/mm}^2$,
tensione inferiore $\sigma_m^i \approx 1,27 \text{ N/mm}^2$
È necessario disporre sotto la mensola
una lastra di ripartizione di $50 \times 50 \text{ cm}^2$
per cui la tensione
sulla muratura risulta $\sigma_m^i \approx 0,77 \text{ N/mm}^2$]